

Famille de graphes p -dynamiques

Ahmed Mouhamadou Wade and Bertrand Ducourthial

Sorbonnes Universités, Université de Technologie de Compiègne,

CNRS, Heudiasyc UMR 7253, Centre de Recherche Royallieu, CS 60319, 60203 Compiègne Cedex, France

Résumé—La dynamique d'un réseau dépend à la fois de la mobilité de ses nœuds et de la capacité de son protocole de communication. Nous proposons de modéliser les réseaux dynamiques avec des graphes p -dynamiques, qui sont définis par une séquence de graphes dont les arêtes permettent de transférer p -messages successifs. Nous montrons que chaque réseau dynamique admet une unique famille finie de graphes p -dynamiques pour différentes valeurs de p . Cette modélisation permet de caractériser et de comparer les réseaux dynamiques de nature très différente.

Index Terms—système distribué, réseaux dynamiques, routage, VANET

I. INTRODUCTION

a) Problème: Un réseau dynamique est caractérisé par i) la mobilité de ses nœuds et ii) leur moyen de communication. D'un point de vue algorithmique, les deux critères sont importants. En effet, ce n'est pas parce que les nœuds d'un réseau se déplacent très vite que l'algorithme réparti échouera : tout dépend de la quantité de données échangées entre deux voisins avant qu'ils ne s'éloignent l'un de l'autre. Inversement, dans un réseau présentant une faible mobilité des nœuds mais utilisant un moyen de communication de faible capacité, un algorithme distribué pourrait avoir des difficultés à atteindre son objectif parce que très peu de données sont échangées entre chaque changement de voisinage.

Cela pourrait se résumer comme suit : exécuter un algorithme réparti dans un réseau d'escargots qui utilisent leurs antennes pour communiquer est-il plus « facile » qu'exécuter le même algorithme dans un réseau de véhicules à très grande vitesse qui utilisent le protocole IEEE 802.11p pour communiquer ?

b) Contribution: Pour aborder ce problème, nous introduisons la notion de *graphe p -dynamique*, qui est une séquence de graphes successivement observés durant l'exécution, telle que la durée de vie de chaque arête est suffisante pour envoyer p messages successifs. Nous montrons que chaque réseau dynamique définit une unique famille finie de graphes p -dynamiques pour différentes valeurs de p . Cette modélisation prend en compte à la fois la mobilité et la performance du moyen de communication. Elle permet d'établir des conditions sur la dynamique pour assurer le succès d'un algorithme donné. Ce faisant, elle permet de comparer la faculté de deux systèmes (de nature différente) à assurer le succès d'un algorithme donné.

c) État de l'art: Les réseaux dynamiques ont d'abord été étudié pour leurs propriétés structurelles [1], [6]. La notion de *evolving graph* proposée par [2], [5] permet d'étudier les évolutions dans le temps de la topologie. Par exemple, la *journey* est un chemin dans la séquence de topologies successives. Les *temporal reachability graphs* sont définis dans [10] en considérant une arête dès lors qu'une *journey* existe entre les extrémités. Par comparaison, notre modèle repose sur une famille de graphes dynamiques, chacun d'eux permettant d'envoyer un nombre donné de messages par arête.

Un certain nombre de travaux se sont penchés sur la relation entre l'algorithmique réparti et la dynamique. Dans [3], des calculs répartis locaux basés sur des renumérotations de graphes et des *evolving graphs* sont utilisés pour analyser et comparer des algorithmes répartis. Dans [4], une synthèse est proposée avec un modèle unifié dénommé *Time-Varying Graph* (TVG). Plusieurs classes de TVG sont identifiées et l'impact de leurs propriétés sur les algorithmes répartis est étudié. Dans [9], les TVG sont modélisés avec un quadruplet $G_d = (V, E, T, \Phi)$, incluant l'ensemble des dates T et considérant les dates de début et de fin de chaque arête. Par comparaison, notre modèle s'abstrait de la notion de temps et s'avère plus approprié pour les preuves d'algorithmes répartis.

II. SYSTÈME RÉPARTI

Dans cette section, nous allons définir les systèmes répartis que nous considérons par la suite.

A. Système

Nous considérons le système distribué dynamique $\mathcal{S}(\mathcal{R}, \mathcal{G})$ défini par un réseau \mathcal{R} et une dynamique \mathcal{G} .

a) Réseau: Le réseau est composé d'un ensemble de n nœuds communiquant entre eux. Chaque nœud possède une mémoire locale et une unité de calcul séquentiel de sorte qu'il est en mesure d'exécuter un algorithme local. Les nœuds sont asynchrones. La mémoire locale d'un nœud v est constituée par sa *mémoire privée* PRIV_v , une *mémoire d'entrée* IN_v et une *mémoire de sortie* OUT_v .

Les nœuds sont équipés d'un dispositif de communication. Les communications sont faites par une action simple appelée *push*. Quand un nœud *émetteur* u exécute $\text{push}(m)$, la valeur m stockée dans sa mémoire de sortie est copiée dans les mémoires d'entrée de certains nœuds *récepteurs* v_1, v_2, \dots, v_k . Pour qu'un nœud v reçoive correctement les données envoyées par un nœud u , plusieurs *conditions de communication* doivent être remplies. Ces conditions sont liées à la

technologie de communication sous-jacente, au protocole de communication, etc. Par exemple : distance bornée, pas de collision avec une autre communication proche, etc.

Si un nœud u émet un message, il ne connaît pas nécessairement les nœuds v_i qui vont le recevoir. Les récepteurs v_i ne connaissent pas non plus u avant de recevoir son message. Les récepteurs sont déterminés par les conditions de communication et donc peuvent être différents entre l'envoi de deux messages successifs par le même nœud u .

b) Dynamique: Le réseau est composé par des nœuds et des liens de communication. La dynamique du réseau est définie par les apparitions et les disparitions de ses liens de communication.

B. Configuration

Une configuration c d'un système distribué \mathcal{S} représente l'état de tout le système, incluant :

- l'état des processeurs (mémoires) ;
- l'état des liens de communication (messages en transit) ;
- l'état de la topologie sous-jacente.

Nous notons par c_{proc} la configuration c réduite aux informations relatives aux processeurs. De la même manière, nous notons par c_{mesg} (respectivement c_{topo}) la configuration c réduite à l'état des liens de communication (respectivement à la topologie). Nous avons $c = c_{topo} \cup c_{mesg} \cup c_{proc}$. Dans un système distribué non dynamique, c est juste défini par $c_{mesg} \cup c_{proc}$ car la topologie est un paramètre du système \mathcal{S} et ne change pas.

Un algorithme réparti est un ensemble d'algorithmes locaux qui s'exécutent sur chaque nœud de \mathcal{S} . L'action des processeurs change la configuration globale du système. Une *exécution* e est une séquence de configurations c_1, c_2, \dots , où c_1 est la *configuration initiale* de l'exécution e . Nous notons par \mathcal{E} l'ensemble des exécutions du système. Pour toute exécution e d'un système distribué \mathcal{S} , nous notons par e_{topo} la séquence $c_{1,topo}, c_{2,topo}, \dots$. Cette séquence donne l'évolution de la topologie sous-jacente du système \mathcal{S} .

III. GRAPHES TEMPORELS

A. Définition et propriétés

Nous définissons les graphes temporels pour ensuite définir les graphes p -dynamiques. Dans un réseau dynamique, deux nœuds peuvent être proches sans pour autant avoir le temps nécessaire pour échanger un seul message avant de s'éloigner. Nous définissons alors le temps nécessaire pour échanger des messages.

Définition 1: La durée de transfert est une fonction $\delta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\delta(p)$ est égal au temps nécessaire pour transférer p messages successifs entre deux nœuds.

Cette fonction dépend de la technologie de communication utilisée. Nous avons la proposition suivante.

Proposition 1: Soit $\delta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de durée de transfert. Alors nous avons $\delta(p) \leq p \times \delta(1)$.

Preuve Supposons que $\delta(p) > p \times \delta(1)$. Alors pour envoyer p messages successifs, nous pouvons les envoyer un par un sur le même lien. D'après la déf. 1, envoyer un message prend au plus $\delta(1)$ unités de temps. Alors pour envoyer p messages un par un, nous avons besoin d'au plus $p \times \delta(1)$ unités de temps. \square

En utilisant la fonction de durée de transfert, nous introduisons l'*arête p -temporelle* pour modéliser le fait qu'à une date donnée, il était possible de transférer p messages entre deux nœuds. Pour cela, nous introduisons un observateur imaginaire externe qui est en mesure de noter tous les événements dans le réseau dynamique. L'observateur utilise sa propre horloge pour dater les événements (les nœuds n'ont pas d'horloge globale et restent asynchrones). En consignant l'apparition ou la disparition des arêtes à la date t_i ($i \in \mathbb{N}, t_i \in \mathbb{R}^+$), il produit une *observation* constituée par une séquence de graphes $(G_{t_0}, G_{t_1}, G_{t_2}, \dots)$. Pour simplifier, nous notons l'observation (G_0, G_1, G_2, \dots) avec G_i le graphe observé au temps t_i , de sorte que chaque arête consignée dans l'un de ces graphes a duré au moins $\delta(1)$ unités de temps.

Définition 2: Considérons un réseau dynamique et sa fonction de durée de transfert δ . Une *arête p -temporelle* notée $(u, v)^{t_i, p}$ est observée entre les nœuds u et v au temps $t_i \geq \delta(p)$ si et seulement si l'arête (u, v) est présente durant tout l'intervalle de temps $[t_i - \delta(p), t_i]$.

Notons que même s'il existe une arête p -temporelle $(u, v)^{t_i, p}$ au temps t_i , une communication pourrait échouer entre les nœuds u et v parce que d'autres conditions de communication ne sont pas remplies. La durée est seulement l'une des conditions nécessaires à l'établissement d'une communication.

Dans un réseau dynamique, si p est trop grand, aucune arête p -temporelle ne sera observée. Cela veut dire qu'aucun lien de communication ne dure assez longtemps pour envoyer p messages successifs. De même, si $\delta(1)$ est très grand (protocole de transfert de données peu efficace), alors aucune arête 1-temporelle ne sera observée. Cela signifie que toute tentative de communication serait un échec dans le réseau dynamique. Par conséquent, à partir d'un moyen de communication donné, nous pouvons calculer la vitesse maximale des nœuds permettant de communiquer. Réciproquement, à partir d'une vitesse des nœuds donnée, nous pouvons calculer la fonction de la durée maximale de transfert, puis en déduire le type de moyen de communication possible.

À partir des arêtes p -temporelles, nous introduisons les *graphes p -temporels*.

Définition 3: Le graphe p -temporel à la date t_i noté G_i^p est défini par la paire $(V, E^{t_i, p})$, où V est un ensemble fixe de nœuds et $E^{t_i, p}$ est l'ensemble des arêtes p -temporelles observées entre les nœuds à la date $t_i \geq \delta(p)$.

Notons par $\mathcal{G}^p = (G_0^p, G_1^p, G_2^p, \dots)$, $p \in \mathbb{N}^*$ la séquence de tous les graphes p -temporels observés.

Définition 4: Pour toute observation o d'un réseau dynamique \mathcal{R} donné, le graphe statique G défini par $(V, \bigcup_{i=0}^{\infty} E^{t_i, 1})$ est appelé le *graphe sous-jacent* de \mathcal{R} .

Définition 5: Pour tout algorithme réparti A et tout système distribué dynamique $\mathcal{S}(\mathcal{R}, \mathcal{G})$ donné, nous disons que \mathcal{S} satisfait les conditions nécessaires pour le bon fonctionnement de l'algorithme A si et seulement si A atteint ses spécifications dans le système distribué statique $\mathcal{S}(\mathcal{R}, G)$, où G est le graphe sous-jacent de \mathcal{R} .

Remarquons que chaque graphe p -temporel est obtenu par l'intersection de p graphes successifs de l'observation : $G_i^p = G_i \cap G_{i+1} \cap \dots \cap G_{i+p}$, $\forall i \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}^*$ (cf. Figure 1). Par ailleurs, si une arête permet d'envoyer p messages, elle permet aussi d'envoyer $p' < p$ messages. Nous avons donc la proposition suivante :

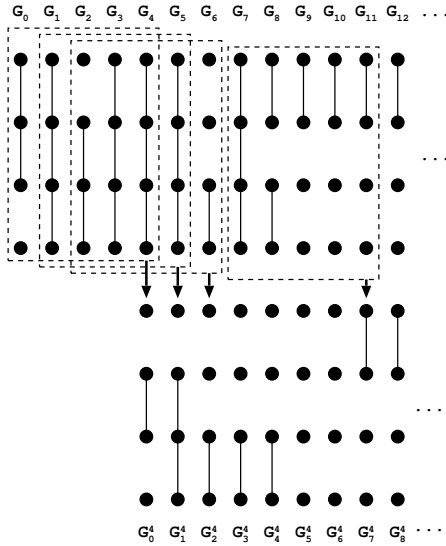


FIGURE 1: Sequence de graphes 4-temporel ($\mathcal{G}^4 = (G_0^4, G_1^4, G_2^4, \dots)$) construite sur l'observation (G_0, G_1, G_2, \dots)

Proposition 2: S'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{G}^p = \mathcal{G}^{p+1}$ alors, $\forall q \in \mathbb{N}^*, q > p \Rightarrow \mathcal{G}^q = \mathcal{G}^p$.

Preuve Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{G}^p = \mathcal{G}^{p+1}$. Cela signifie que $\forall i \in \mathbb{N}, G_i^p = G_i^{p+1}$. Par définition nous avons, $G_i^p = G_i \cap \dots \cap G_{i+p}$. De même, nous avons $G_{i+1}^p = G_{i+1} \cap \dots \cap G_{i+p+1}$ et $G_i^{p+1} = G_i \cap G_{i+1} \cap \dots \cap G_{i+p+1}$. Donc $G_i^p \cap G_{i+1}^p = G_i \cap G_{i+1} \cap \dots \cap G_{i+p} \cap G_{i+p+1}$. On en déduit que $G_i^p \cap G_{i+1}^p = G_i^{p+1}$ et donc $G_i^p \subseteq G_{i+1}^{p+1}, \forall i \in \mathbb{N}$.

Remarquons que $\mathcal{G}^p = \mathcal{G}^q$ signifie que, pour tout entier i , $G_i^p = G_i^q$. Toujours d'après la définition 3, nous avons : $G_i^q = G_i \cap G_{i+1} \cap \dots \cap G_{i+p} \cap G_{i+p+1} \cap \dots \cap G_{i+q}$, ce qui conduit à $G_i^q = G_i^p \cap G_{i+1}^p \cap \dots \cap G_{i+q-p}^p$. En utilisant le résultat précédent ($G_i^p \subseteq G_{i+1}^{p+1}, \forall i \in \mathbb{N}$), on obtient $G_i^q = G_i^p, \forall i \in \mathbb{N}$. D'où $\mathcal{G}^p = \mathcal{G}^q$, ce qui conclut la preuve. \square

B. Graphe temporel et configuration

Selon la définition d'une configuration, tout changement dans le système distribué conduit à une nouvelle configuration. Il y a donc une topologie par configuration. Pour déterminer les communications qui sont possible juste avant ou juste après

une configuration, nous introduisons le p -graphe à / à partir de la configuration comme suit.

Définition 6: Pour une observation o donnée, soit t_c la date à laquelle le système distribué atteint une configuration c donnée. Le p -graphe à la configuration c noté par $G_{c_1}^p$ est le graphe de $(G_i^p)_{i \in \mathbb{N}}$ observé à la date t_c . Le p -graphe à partir de la configuration c noté par $G_{t_c}^p$ est le graphe de $(G_i^p)_{i \in \mathbb{N}}$ observé à la date $t_c + \delta(p)$.

Le graphe $G_{t_c}^p$ est composé de toutes les arêtes permettant d'envoyer p messages à partir de la configuration c . Dans une exécution $e = c_1, c_2, \dots$, le graphe $G_{c_1}^1$ est la topologie initiale. Il est important de noter que la topologie initiale d'un système distribué dynamique ne peut pas être observée avant un délai de $\delta(1)$ unité de temps car il n'y a aucune garantie que deux nœuds proches au temps $t = 0$ ne s'éloignent pas sans communiqués avant $\delta(1)$ unité de temps. Un système distribué dynamique contient des liens stables si $G_{c_1}^1 = G_{c_1}^p$ pour tout entier $p > 0$.

Il est évident que si une arête permet d'envoyer p messages, elle permet également d'envoyer $q < p$ messages. Nous avons alors la proposition suivante. Notons que $G(V, E) \subseteq G'(V, E')$ signifie que toute arête de E appartient à E' .

Proposition 3: Pour toute configuration c d'une exécution e et pour tout entier p et q , nous avons : si $p > q$ alors, $G_{t_c}^p \subseteq G_{t_c}^q$ et $G_{c_1}^p \subseteq G_{c_1}^q$.

Preuve Supposons qu'il existe G, p, q and c tel que $p > q$ et $G_{t_c}^q \subset G_{t_c}^p$. Cela signifie qu'il existe au moins une arête $e \in G_{t_c}^p$ et $e \notin G_{t_c}^q$. D'après la Définition 6, $e \in G_{t_c}^p$ et $e \notin G_{t_c}^q$ signifie que e existe durant tout l'intervalle de temps $t_c + \delta(p)$ et elle n'existe pas durant tout l'intervalle de temps $t_c + \delta(q)$.

Nous avons $p > q$, ce qui implique que $\delta(p) \geq \delta(q)$. Si nous ajoutons t_c dans les deux côtés de l'inégalité, nous allons avoir $t_c + \delta(p) \geq t_c + \delta(q)$. Ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Par la même manière, nous pouvons prouver que $G_{c_1}^p \subseteq G_{c_1}^q$. \square

Corollaire 1: Pour toute observation donnée nous avons : $\forall p, q \in \mathbb{N}^*, p > q$ implique $\forall t_i \in \mathbb{R}^+, G_{t_i}^p \subseteq G_{t_i}^q$.

En d'autres termes, lorsque p augmente, il y a de moins en moins d'arêtes dans un graphe p -temporel. Un graphe p -temporel est donc construit en retirant les arêtes de courte durée.

IV. GRAPHS p -DYNAMIQUES

A. Définition

Partant de la définition des graphes p -temporels, nous définissons les graphes p -dynamiques. Leur définition ne repose pas sur le temps, ce qui s'avère plus pratique pour l'étude des propriétés des algorithmes répartis. Rappelons qu'un graphe dynamique sur un ensemble de sommets V noté par $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est défini par la séquence infinie de graphes « statiques » $G_k(V, E_k)$ avec $E_k \subset V \times V$. Cette modélisation est bien adaptée à l'étude des propriétés structurelles d'un réseau dynamique [5] mais admet des limitations pour les

propriétés des algorithmes répartis. Pour définir les graphes p -dynamiques à partir des graphes p -temporels sans les temps de référence, nous introduisons les *intervalles de stabilité*.

Définition 7: Considérons la séquence de graphes p -temporels $(G_i^p)_{i \in \mathbb{N}}$ provenant d'une observation. L'intervalle de stabilité I^p de $(G_i^p)_{i \in \mathbb{N}}$ est la séquence d'intervalles de temps $I^p = [t_0, t_1[, [t_1, t_2[, \dots$ définie par :

- $t_0 = 0$;
- pour chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$ de I^p et pour chaque date $t_j \in [t_i, t_{i+1}[$, le graphe p -temporel à la date t_j est égal au graphe p -temporel à la date t_i : $G_j^p = G_i^p$;
- $G_{i+1}^p \neq G_i^p$.

En utilisant les intervalles de stabilité, nous définissons le graphe p -dynamique de l'observation. C'est un graphe dynamique (une séquence de graphes) tel que chaque arête permet d'envoyer p messages successifs.

Définition 8: Considérons une séquence de graphes p -temporels $(G_i^p)_{i \in \mathbb{N}}$ provenant d'une observation et ses intervalles de stabilité $I^p = [t_0, t_1[, [t_1, t_2[, \dots$. Le graphe p -dynamique est défini par la séquence $\bar{\mathcal{G}}^p = (G_i^p)_{i \in \mathbb{N}}$ tel que chaque graphe G_i^p est le graphe observé au temps t_i .

Notons que par définition, le graphe p -dynamique $\bar{\mathcal{G}}^p$ est égal au graphe p -temporel \mathcal{G}^p sans qu'il y ait deux graphes identiques consécutifs dans la suite de graphes qui composent \mathcal{G}^p . Le graphe p -dynamique permet de capturer à la fois le mouvement des nœuds et les performances du moyen de communication.

B. Famille de graphes p -dynamiques

D'après la définition des graphes p -dynamiques, un réseau dynamique admet, pour tout entier $p > 0$, un unique graphe p -dynamique $\bar{\mathcal{G}}^p$. Dans la définition suivante, nous allons introduire la famille des graphes p -dynamiques en considérant tous les entiers possibles.

Définition 9: La famille des graphes p -dynamiques \mathcal{F} d'un réseau dynamique est la séquence de graphes p -dynamiques $\mathcal{F} = ((\bar{\mathcal{G}}^p)_{p \in \mathbb{N}^*})$ tel que $\mathcal{G}^p \neq \mathcal{G}^{p+1}$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 4: Pour tout réseau dynamique donné, la famille des graphes p -dynamiques est finie.

Preuve Tout d'abord, notons que pour toute observation donnée et pour tout entier p , le graphe p -dynamique $\bar{\mathcal{G}}^p$ est égal au graphe p -temporel \mathcal{G}^p sans répétition successive de graphes statiques qui composent \mathcal{G}^p . Donc pour prouver que la famille \mathcal{F} des graphes p -dynamiques d'une observation donnée est finie, nous allons prouver que l'ensemble des graphes p -temporels de l'observation $\{\mathcal{G}^p\}_{p \in \mathbb{N}^*}$ est fini.

De la proposition 3, nous déduisons que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{G}^{p+1} \subseteq \mathcal{G}^p$.

- 1) Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{G}^{p+1} = \mathcal{G}^p$. Dans ce cas, d'après la prop. 2; nous avons $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $q > p \Rightarrow \mathcal{G}^q = \mathcal{G}^p$. La famille est donc finie et $\bar{\mathcal{G}}^p$ en est le dernier élément (les arêtes de $\bar{\mathcal{G}}^p$ permettent l'envoi d'un nombre infini de messages).
- 2) Supposons qu'il n'existe pas $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{G}^{p+1} = \mathcal{G}^p$. Nous avons alors : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{G}^{p+1} \subset \mathcal{G}^p$. Rappelons que,

pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, le graphe dynamique \mathcal{G}^p est défini par une suite de graphes (statiques) $\mathcal{G}^p = (G_0^p, G_1^p, \dots)$ tel que chacun d'eux est défini sur un ensemble fixe de sommets. Donc chaque graphe statique a un nombre fini d'arêtes. Si $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $\mathcal{G}^{p+1} \subset \mathcal{G}^p$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $G_i^{p+1} \subset G_i^p$. Il existe donc un entier p tel que : \mathcal{G}^q est vide si $q > p$. Le graphe p -dynamique $\bar{\mathcal{G}}^p$ est donc le dernier élément de la famille, qui est donc finie. \square

Ainsi, tout réseau dynamique, quel que soit la mobilité de ses nœuds et les performances de sa technologie de communication, peut se modéliser par une famille finie de graphes p -dynamiques, qui est la séquence des graphes p -dynamiques non vides ordonnée selon les entiers p croissants.

V. APPLICATION

Dans cette section, nous allons utiliser les familles de graphes p -dynamiques pour qualifier quelques résultats d'algorithme répartie dans les réseaux dynamiques. Nous allons donner dans un première temps un moyen pour comparer deux réseaux dynamiques différents et nous allons finir cette section en montrant les limites intrinsèques du routage sur les réseaux dynamiques.

Proposition 5: Soit R_a et R_b deux réseaux dynamiques différents ayant respectivement les observations Obs_a et Obs_b et les familles de graphes p -dynamiques \mathcal{F}_a et \mathcal{F}_b .

Nous avons :

- $Obs_a = Obs_b \Rightarrow \mathcal{F}_a = \mathcal{F}_b$
- $\mathcal{F}_a = \mathcal{F}_b \not\Rightarrow Obs_a = Obs_b$

Preuve Notons tout d'abord que deux familles de graphes p -dynamiques $\mathcal{F}_a = ((\bar{\mathcal{G}}_a^p)_{p \in \mathbb{N}^*})$ et $\mathcal{F}_b = ((\bar{\mathcal{G}}_b^p)_{p \in \mathbb{N}^*})$ de deux réseaux dynamiques différents sont égales si $\forall p$, $\mathcal{G}_a^p = \mathcal{G}_b^p$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\bar{\mathcal{G}}^p$ est égal à \mathcal{G}^p sans les répétitions successives des graphes qui le composent. Par définition, \mathcal{G}^p est une séquence de graphes p -temporel tel que chacun d'eux est obtenu en faisant l'intersection de $p + 1$ graphes de l'observation.

Si nous avons deux réseaux dynamiques différents qui ont les mêmes observation, alors l'intersection successive des $p + 1$ graphes de l'observation donnera les mêmes graphes p -temporel $\forall p \in \mathbb{N}^*$, ce qui prouve que pour tout R_a et R_b , si $Obs_a = Obs_b \Rightarrow \mathcal{F}_a = \mathcal{F}_b$.

Toutefois, le fait d'avoir deux graphes p -temporel (de deux observations différents) qui sont égaux n'implique pas forcément que les graphes de leurs observation respectif qui les composent sont successivement égaux, ce qui veut dire que le fait d'avoir $\mathcal{F}_a = \mathcal{F}_b$ n'implique pas l'égalité $Obs_a = Obs_b$. \square

Cette proposition montre que deux réseaux dynamiques différents avec des observations différentes peuvent donner la même famille de graphes p -dynamiques. Cela nous amène à dire qu'avec seulement les observations, nous ne pouvons conclure si deux réseaux dynamiques différents ont la même famille de graphes p -dynamiques ou pas. C'est la raison pour laquelle, dans cet article, nous considérons la famille

des graphes p -dynamiques pour comparer la dynamique de deux ou plusieurs réseaux différents. Par la dynamique d'un réseau, nous voulons dire l'apparition et la disparition de ses liens de communication. La proposition suivante porte sur la comparaison de deux réseaux différents.

Proposition 6: Deux réseaux dynamiques différents R_1 et R_2 ont la même *dynamique* si $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$, avec \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 les familles respectives de graphes p -dynamiques de R_1 et R_2 .

Cette proposition indique qu'avec la famille des graphes p -dynamiques, nous pouvons comparer la dynamique de deux réseaux de nature très différent (exemple : un réseau d'escargots et un réseau de véhicules). En plus de la dynamique, nous pouvons, avec la famille de graphes p -dynamiques, comparer les résultats attendus d'un algorithme réparti donné sur deux réseaux dynamiques différents.

Nous avons la proposition suivante qui donne cette comparaison. Dans cette proposition, R_a et R_b peuvent être de nature très différente comme notre exemple de réseau d'escargots et de réseau véhiculaire.

Proposition 7: Soit deux réseaux dynamiques différents R_a et R_b donnés, et \mathcal{F}_a et \mathcal{F}_b leurs familles de graphes p -dynamiques respectives. Pour tout algorithme réparti A , si $\mathcal{F}_a = \mathcal{F}_b$ et R_a et R_b satisfont les conditions nécessaires de A (Cf. Définition 5), alors l'algorithme A donnera toujours les mêmes résultats sur R_a et R_b .

Preuve Considérons deux réseaux dynamiques différents R_a et R_b ayant respectivement la famille de graphes p -dynamiques \mathcal{F}_a et \mathcal{F}_b tel que $\mathcal{F}_a = \mathcal{F}_b$. Supposons qu'il existe un algorithme réparti A qui atteint ses spécifications dans R_a et pas dans R_b et que R_a et R_b satisfont les conditions nécessaires pour le bon fonctionnement de A . Cela signifie qu'il existe au moins une communication qui a été faite correctement dans R_a et qui n'a pas pu se réaliser dans R_b . Donc, il existe au moins une arête qui a permis d'envoyer un nombre de messages q dans R_a plus grand que le nombre de messages q' qu'elle a permis d'envoyer dans R_b . Alors $\bar{\mathcal{G}}_a^q \neq \bar{\mathcal{G}}_b^q$, ce qui impliquant $\mathcal{F}_a \neq \mathcal{F}_b$. \square

Cette proposition montre que si deux réseaux dynamiques quelle que soit leur nature ont la même famille de graphes p -dynamiques, alors tout algorithme réparti donnera les mêmes résultats sur les deux réseaux dynamiques (dans la mesure où les deux systèmes sont en mesure d'exécuter l'algorithme).

En plus de permettre la comparaison de la dynamique des réseaux, la famille des graphes p -dynamiques permet aussi d'en déduire s'il est possible ou non d'obtenir une information locale valide sur la topologie à plusieurs sauts. Par *valide* nous entendons qu'à chaque fois qu'un changement de topologie locale se propage, il est encore à jour quand elle est reçue. Par exemple, supposons que u veuille informer un nœud v (distant) de son nouveau voisin u' , et que v reçoive l'information plus tard en raison de la distance entre u et v . Si u' est toujours voisin de u lorsque v reçoit l'information, alors l'information est dite *valide*.

Proposition 8: Considérons un réseau dynamique et sa famille de graphes p -dynamiques $\mathcal{F} = ((\bar{\mathcal{G}}^p)_{p \in \mathbb{N}^*})$. Si $\bar{\mathcal{G}}^{q-1} \neq$

$\bar{\mathcal{G}}^q$ alors aucun algorithme réparti ne peut donner une description locale de la topologie valide à q sauts.

Preuve Si $\bar{\mathcal{G}}^{q-1} \neq \bar{\mathcal{G}}^q$ alors, pour n'importe quel algorithme qui s'exécute sur le réseau dynamique, il existe au moins une configuration c telle que $G_{ic}^{q-1} \neq G_{ic}^q$. Soit (u, u') l'une des arêtes existant dans G_{ic}^{q-1} et qui n'existe pas dans G_{ic}^q . La durée de cette arête est alors inférieure à $\delta(q)$. L'envoi d'un message de u à q sauts exige un délai d'au moins $q \times \delta(1)$. Comme $\delta(q) \leq q \times \delta(1)$ (Cf. Proposition 1), un délai minimum de $\delta(q)$ est requis. Alors, lorsque le message envoyé par u est reçu par un nœud v tel que $\text{dist}(u, v) = q$, l'arête (u, u') n'existe plus dans G_{ic}^q . Ainsi, aucune description locale valide de la topologie ne peut être envoyée à q sauts si $(G_i^{q-1})_{i \in \mathbb{N}} \neq (G_i^q)_{i \in \mathbb{N}}$. \square

La Proposition 8 donne une indication intéressante sur l'utilisation de la description de la topologie locale pour le routage. En effet, en étudiant la famille de graphes p -dynamique d'un réseau dynamique donné, il est possible de déduire la distance maximale à partir de laquelle il n'est plus intéressant de transmettre des informations locales sur la topologie.

VI. CONCLUSION

Nous avons proposé de modéliser les réseaux dynamiques par une unique famille finie de p -dynamique graphes. Cette modélisation prend en compte la mobilité des nœuds et le moyen de communication. Elle permet d'inférer des propriétés des algorithmes en fonction de la dynamique, et de comparer des systèmes de nature différente.

Nos futurs travaux porteront sur l'application de ce modèle à l'étude d'algorithmes répartis dans les réseaux véhiculaires.

RÉFÉRENCES

- [1] P. Borgnat, E. Fleury, J.-L. Guillaume, and C. Robardet. Characteristics of the dynamic of mobile networks. In *Proc. BIONETICS 2009*, vol. 6811, pages 130–139.
- [2] B.-M. Bui-Xuan, A. Ferreira, and A. Jarry. Computing shortest, fastest, and foremost journeys in dynamic networks. In *journal IJFCS*, 14(2) :267–285, 2003.
- [3] A. Casteigts, S. Chaumette, and A. Ferreira. Distributed computing in dynamic networks : Towards a framework for automated analysis of algorithms. *CoRR*, abs/1102.5529, 2012.
- [4] A. Casteigts, P. Flocchini, W. Quattrociocchi, and N. Santoro. Time-varying graphs and dynamic networks. In *Proc. ADHOC-NOW 2011*, pp. 346–359.
- [5] A. Ferreira. Building a reference combinatorial model for MANETs. *IEEE Network*, 18(5) :24–29, 2004.
- [6] F. Harary and G. Gupta. Dynamic graph models. *Mathematical and Computer Modelling*, 25(7) :79 – 87, 1997.
- [7] Julian Monteiro, Alfredo Goldman, and Afonso Ferreira. Performance evaluation of dynamic networks using an evolving graph combinatorial model. *WiMob*, 2006.
- [8] R. O Dell and R. Wattenhofer. Information dissemination in highly dynamic graphs. *DIALM-POMC 2005*.
- [9] Klaus Wehmuth, Eric Fleury, and Artur Ziviani. A New Model for Time-Varying Graphs. In *Temporal and Dynamic Networks : From Data to Models*, , March 2013.
- [10] J. Whitbeck, M. Dias de Amorim, V. Conan, and J.-L. Guillaume. Temporal reachability graphs. *Mobicom 2012*.