

Identification de domaine par observation frontière

Msc. Tamgno K. James

Département ESMT Télécoms
ESMT

BP. 10000 Dakar - Sénégal

james.tamgno@esmt.sn

Dr OUYA Samuel

Département Informatique
ESP

BP. Dakar - Sénégal

samuel.ouya@ucad.sn

Dr KORA Ahmed

Département ESMT Télécoms
ESMT

BP. 10000 Dakar – Sénégal

Ahmed.kora@esmt.sn

RÉSUMÉ. L'objectif de ce travail, qui a été effectué au Laboratoire Informatique et Réseaux Télécoms (LIRT) porte sur la détermination des procédures permettant de reconnaître un domaine, par observation frontière. Il s'agit de prouver que lorsque l'on envoie des signaux bien déterminés sur un bord connu Γ_0 d'un domaine régulier de Ω de $\mathbb{R}^n (n = 1, 2, 3)$, où sévissent des phénomènes modélisés par des équations aux dérivées partielles, et qu'à la suite d'un certain nombre de mesures de flux sur le même bord et connaissant $\int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial n} g d\Gamma$ (où n désigne la normale extérieure à $\partial\Omega$), il est possible de trouver une méthode qui conduise à la détermination de Ω . Nous avons effectué le travail dans le cas stationnaire en dimension $n = 1, 2, 3$ et forme quelconque.

ABSTRACT. The objective of this work, which was conducted at the Laboratory of Computer and Telecommunication Networks (LIRT) was to carry out the determination procedures to identify a domain by looking border. We proved that if well defined signals are sent on the known edge Γ_0 of a regular field Ω of $\mathbb{R}^n (n = 1, 2, 3)$, where prevail some phenomena modeled by partial derivative equations and that following a certain number of flow measurements on the same edge, knowing $\int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial n} g d\Gamma$ (where n indicates the normal external of $\partial\Omega$), it is possible to find a method which leads to the determination of Ω . The demonstrations were made in the stationary case with dimension $n = 1, 2, 3$ and arbitrary form.

MOTS-CLÉS : liste de mots-clés, en français, séparés par des virgules.

KEYWORDS: list of keywords, in English, separated with commas.

1. Introduction.

La reconnaissance de domaine consiste à rechercher la forme géométrique d'un objet connaissant certaines de ses caractéristiques physiques. Elle est proche de l'optimisation de forme introduite il y'a une trentaine d'années et utilisée dans la mécanique pour la construction des pièces solides et légères. En général, les critères à optimiser sont par exemple la solidité, la trainée, le rendement, ou l'énergie rayonnée. Ceux-ci font intervenir la solution d'un système d'équations aux dérivées partielles posées sur un ouvert Ω .

Nous nous intéressons ici au problème d'identification d'un domaine régulier Ω de \mathbb{R}^n ($n = 1, 2, 3$), dont une partie de la frontière Γ_0 est connue. On excite la partie connue Γ_0 et on mesure sa réaction. Le problème est d'identifier le domaine Ω .

Les domaines d'applications dans lesquels l'on peut être amené à exploiter les solutions posées par ce genre de problème sont variés, Opérateur de téléphonie, Topographie, Sismographie, Réflectométrie, Aéronautique, Centrales nucléaires. On peut citer la téléphonie par câble, où un opérateur voudrait trouver une méthode lui permettant de déterminer la distance qui sépare un point de rupture et l'extrémité connue d'un domaine représenté par une ligne téléphonique par câble, puis la transmission par fibre optique, où un opérateur voudrait également trouver une méthode lui permettant de déterminer la distance qui sépare un point de rupture et l'extrémité connue d'un domaine représenté par une ligne de transmission par fibre optique, enfin la détermination de l'étendue d'un gisement de pétrole ou de minerais.

Pour justifier les raisons de nos prétentions, dans cet article, nous aborderons dans la position du problème, puis nous présenterons quelques concepts mathématiques et des modèles de problèmes connexes, afin de proposer les solutions d'identification de domaine en dimension $n = 1, 2, 3$ et forme quelconque.

2. Position du problème.

On considère un domaine borné régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n = 1, 2, 3)$ et $c \in C^0(\mathbb{R}^n (n = 1, 2, 3))$ à valeur dans \mathbb{R}^+ , g une fonction continue sur $\mathbb{R}^n (n = 1, 2, 3)$.

On suppose que le phénomène qui a lieu dans Ω est modélisée par une équation du type onde :

Etant donné un domaine dans lequel sévit un phénomène modélisé par des équations aux dérivées partielles, plus particulièrement par l'équation :

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = 0, & \text{sur } \Omega \\ u|_{\Gamma_0} = g \\ u|_{\partial\Omega \setminus \Gamma_0} = 0 \end{cases} \quad (E)$$

On envoie des signaux bien déterminés sur le bord Γ_0 modélisés par g et on mesure

l'intégrale $\int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial n} g d\Gamma$ (où n désigne la normale extérieure à $\partial\Omega$).

Question : la connaissance de $\int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial n} g d\Gamma$ permet-elle de déterminer le domaine Ω ?

3. Théories mathématiques connexes.

3.1. Théorie des distributions.

Soit T une application linéaire de $\mathcal{D}(\Omega)$ vers \mathbb{R} (où $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact sur Ω). La distribution sur $\mathcal{D}(\Omega)$ se définit comme étant toute application $T: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire et continue.

On note $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle T, \varphi \rangle = T(\varphi)$. $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'ensemble des distributions sur Ω . Ainsi pour toute fonction u de classe C^1 , on définit la distribution $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, le dual de l'espace fonctionnel $\mathcal{D}(\Omega)$, définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad T_u(\varphi) = \langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx \quad \text{et}$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \langle \frac{\partial}{\partial x_i} T_u, \varphi \rangle = - \langle T_u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle$, pour $i = 1, \dots, n$. De même pour chaque multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on a : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \langle \mathcal{D}^\alpha T_u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_u, \mathcal{D}^\alpha \varphi \rangle$.

3.2. Principe du maximum

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n de classe C^1 , $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$ tels que:

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} a_0 u v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad \text{Si } a_0 \in L^2 \text{ vérifie } a_0 \geq 0 \text{ sur } \Omega$$

alors $(u \geq 0 \text{ sur } \Gamma_0 \text{ et } (f \geq 0 \text{ sur } \Omega) \rightarrow (u \geq 0 \text{ sur } \Omega)$

4. Modèles de problèmes.

4.1. Conservation du flux dans un support de transmission

Considérant une grandeur scalaire $u(x)$ (température, la concentration chimique...)

En y associant un flux (chaleur, matière...)

Quelque soit le volume d'intégration ω , le flux de $u(x)$ vers l'extérieur de cette quantité, $q(x)$ est nul à l'équilibre, soit $\int_{\partial\omega} q(x) \cdot n_x ds = 0$

En y appliquant la formule de Green-Riemann [1] de divergence de flux, on obtient :

$$\int_{\omega} \operatorname{div}_x q(x) dx = 0$$

En supposant une bonne régularité pour $q(x)$, on obtient une version locale de cette équation, puisque ω est arbitraire, $\operatorname{div}_x k(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega$

Du fait de l'indépendance du volume d'intégration [2] de G. Demengel.

Si l'on suppose de plus que ce flux est une fonction linéaire du gradient, ∇u , et orienté dans la direction opposée (les flux se font souvent opposée au gradient d'une grandeur), dans la plupart des situations, il est physiquement raisonnable de supposer que le flux est proportionnel au gradient ∇u .

On peut alors écrire que :

$q(x) = -k(x) \nabla_x u$, $k(x) > 0$ (loi de Fick de la diffusion, loi de Fourier de la conduction de la chaleur, loi d'Ohm de la conduction de l'électricité)

On obtient une loi de conservation à l'équilibre du type $\operatorname{div}_x (-k(x) \nabla u(x)) = 0$

$k(x) > 0$, on obtient la plus simple des équations elliptique, l'équation de Laplace qui modélise le phénomène stationnaire de conservation du flux sur un support de transmission $\operatorname{div}(-\nabla u(x)) = 0$, qui conduit à $-\Delta u(x) = 0$ (équation de Laplace)

Cette notion de conservation de flux fournit un modèle mathématique pour des lois de conservation à l'équilibre en comportement linéaire, qui s'applique à la modélisation des

phénomènes stationnaires dans plusieurs domaines des sciences pour l'ingénieur on peut entre autre citer [3] de R.Dautray et J.L. Lions:

- **Dans le cas de la diffusion des particules** : $u(x)$ représente la concentration chimique à la position x ; k est appelé le coefficient de diffusion ; $q(x)$ représente le champ de flux chimique ; et l'équation de Laplace est appelée loi de Fick.
- **Dans le cas écoulement d'un fluide dans un milieu poreux** : $u(x)$ représente la pression du fluide suivant la position x ; k est appelée conductivité hydraulique ; $q(x)$ représente le champ de flux dans le fluide et l'équation de Laplace est appelée loi de Darcy.
- **Dans le cas des flux d'électrons dans un conducteur** : $u(x)$ représente le voltage suivant la position x ; k est appelée conductivité électrique ; $q(x)$ représente le flux du courant électrique ; et l'équation de Laplace est appelée loi d'Ohm.
- **En régime stationnaire** : la température $T(x)$ d'un milieu de conductivité thermique uniforme, soumis sur ses bords à des températures différentes, vérifie l'équation de Laplace sous la forme $-\Delta T(x) = 0$.
- **En régime statique** : le potentiel électrique dans le vide vérifie aussi l'équation de Laplace.
- **De la même manière** :, le potentiel gravitationnel entre les planètes, vérifie également l'équation de Laplace.

Ainsi de nombreux problèmes physiques peuvent se ramener à la recherche d'un champ scalaire que nous appelons potentiel et que nous notons $u(x)$ en dimension un, vérifiant l'équation de Laplace.

Le premier modèle de problème considéré ici et modélisé par l'équation de Laplace ne peut trouver de solution que si on lui associe des conditions limites sur chaque morceau de la frontière qui feront en sorte que le problème soit bien posé.

En général, dans l'équation de Laplace, on cherche la solution dans une zone de l'espace Ω . Les bords de Ω notés $\partial\Omega$ imposent des contraintes : on parle de conditions limites. On distingue habituellement, trois types de conditions aux limites :

- La valeur du potentiel de flux sur la frontière $\partial\Omega$. C'est par exemple le cas lorsque l'on étudie le potentiel électrique qui règne entre différents conducteurs électriques soumis à des tensions connues. On parle dans ce cas des conditions limites de Dirichlet.
- La valeur de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial n}$ normale du potentiel de flux est fixée. On parle dans ce cas des conditions de Von Neumann

- On peut également imposer ces deux conditions sur la frontière $\partial\Omega$. C'est la condition de Cauchy

Bref l'équation de Laplace ne peut avoir de solution que si l'on a précisé à la fois $u|_{\partial\Omega}$ et $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = (\overrightarrow{\text{grad}} u) \cdot \vec{n}$ le long de la frontière. Et d'après la formulation de Green,

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n_x} ds = \int_{\partial\Omega} (u\Delta u + \nabla u \nabla u) dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx \text{ car } \Delta u = 0$$

Ainsi d'après les théorèmes de de G. Demengel, P. Benichou [2], pour toute fonction $g, h \in C(\Omega)$, le problème définie par :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega_1 \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} = h(x), & x \in \partial\Omega_2 \end{cases}$$

Equation qui, munie des conditions aux frontières est bien posée et justifie la position du problème (E), avec

$$\begin{cases} c = 0 \\ \Omega_1 = \Gamma_0 \\ \Omega_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0 \end{cases}$$

4.2. Propagation d'ondes dans un support de transmission (guide coaxial en espace libre, milieu isotrope)

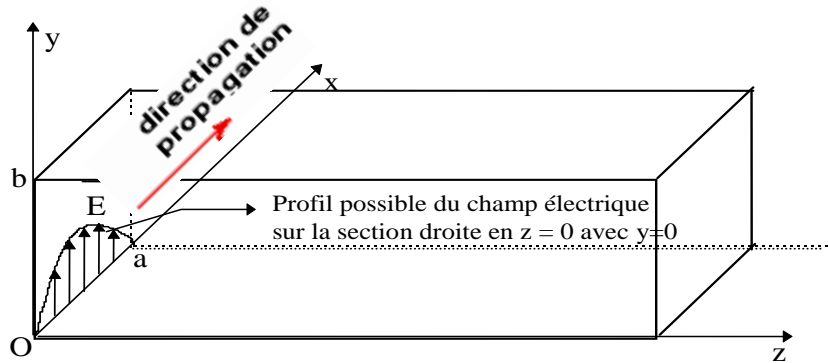


Figure 1. Unité de transmission

Soit une portion du guide de transmission représentée par la figure 1, les équations de maxwell [30] sous forme locale pour tout point situé à l'intérieur du guide s'écrivent :

$$\text{Maxwell-Gauss} \quad \text{div} \vec{E} = 0$$

$$\text{Equation du flux magnétique} \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{Maxwell-Faraday} \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Maxwell-Ampère} \quad \text{rot} \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

La substitution des ces équations permet d'obtenir l'équation de propagation de l'onde valable en chaque point à l'intérieur du guide de transmission.

$$\Rightarrow \Delta \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Nous nous intéressons à la recherche des solutions particulières de cette équation sous forme d'ondes progressives (stationnaires), harmoniques de pulsation ω , polarisées rectilignement et caractérisées par un champ électromagnétique

Considérons la fonction scalaire $s(x,t)$ définie par :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$$

En posant $s(x,t) = u(x)e^{-i\omega t}$, on obtient après transformation l'équation $u''(x) - ku(x) = 0$, dite de Helmholtz avec $k = \frac{\omega^2}{c^2}$. En général, pour un même guide, les conditions de Dirichlet et de Neumann conduisent à des spectres différents [2]. Et d'après les théorèmes de de G. Demengel, P. Benichou [2], pour toute fonction $g, h \in C(\Omega)$, le problème définie par l'équation:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + cu(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega_1 \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} = h(x), & x \in \partial\Omega_2 \end{cases}$$

Et une des conditions aux frontières est bien posé et justifie la position du problème (E),

avec
$$\begin{cases} c = k \\ \Omega_1 = \Gamma_0 \\ \Omega_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0 \end{cases}$$

Remarque : le problème ainsi posé est également valable en dimension deux, trois, cylindrique et sphérique.

5. Identification de domaine dans le cas stationnaire.

5.1. En dimension 1.

Si $\Omega =]0, a[$ alors déterminer Ω reviendrait à déterminer a sachant que l'extrémité 0 est connue.

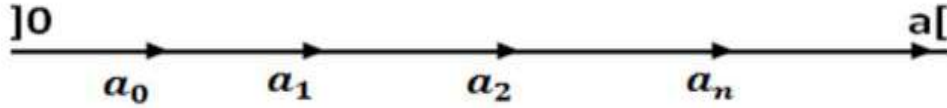


Figure 2. Représentation de Ω en dimension 1

On suppose que le phénomène est modélisé par l'équation ci-dessous

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = 0 & (1) \text{ pour } 0 < x < a \\ u(0) = 1 \text{ et } u(a) = 0 \end{cases} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } c \in C^0]0, a[$$

On suppose en outre que $c(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

On suppose également que $u'(0)$ est donné, alors comment retrouver a ($0 < x < a$) pour que le problème soit bien posé ?

Théorème 5.1. $\forall c$, fonction positive $\in C^0(\mathbb{R}^n (n = 1, 2, 3))$ à valeurs dans \mathbb{R}^+ , alors la fonction $g: a \rightarrow g(a) = u'(0)$ de \mathbb{R}_*^+ à valeurs dans $]-\infty, 0[$ est injective et strictement décroissante.

Avec ce théorème, nous montrons que a est déterminé de manière unique.

Algorithme décrivant la procédure de détermination des valeurs de a_i (figure 2)

1. Début
2. On se donne a un point de rupture
3. On parcourt successivement la base données contenant les différents nœuds (a_i) préenregistrés pour savoir où se situe a .
4. Si $a > a_i$ alors $g(a) < g(a_i)$
5. En considérant a_1 (le premier nœud du domaine connu)
 Si $g(a) > g(a_1)$ alors $a_1 < a$ sinon $a > a_1$
 FinSi
6. On cherche $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que
7. Si $g(a_{i_0+1}) < g(a) < g(a_{i_0})$
8. alors $a_{i_0+1} < a < a_{i_0}$
 FinSi
9. FinSi
10. Fin

En supposant au préalable que les valeurs $u'_{a_i}(0)$ correspondantes pour chaque nœud a_i du domaine représentant une ligne téléphonique par câble ont été évaluées, mesurées et enregistrées dans une base de données, comme l'indique ce le tableau ci-dessous.

a_1	a_2	...	a_n
$u'_{a_1}(0)$	$u'_{a_2}(0)$...	$u'_{a_n}(0)$

Tableau 1. Résultats des différentes valeurs de a_i

5.2. En dimension 2 : Cas rectangulaire.

Soit O un ouvert borné non vide de \mathbb{R}^2 connu et de mesure de Lebesgue notée $\text{mes}(O)$. Γ_0 une partie non vide de l'adhérence \bar{O} de l'ouvert O .

$$E_{\Gamma_0}(O) = \{\Omega \subset O, \Omega \text{ domaine borné de classe } C^2 \text{ avec } \Gamma_0 \subset \partial\Omega\}$$

On suppose qu'il existe une fonction g_0 définie sur Γ_0 non nulle et positive.

$\forall \Omega \in E_{\Gamma_0}(O)$, $\widetilde{g}_0: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\widetilde{g}_0(x) = \begin{cases} g_0(x) & \text{si } x \in \Gamma_0 \\ 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \setminus \Gamma_0 \end{cases}$ \widetilde{g}_0 admet un relèvement sur Ω appartenant à $H^2(\Omega)$.

Pour $\Omega \in E_{\Gamma_0}(O)$, on dit que u est solution de l'équation ci-dessous d'après le problème posé

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + q(x)u(x) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = g_0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_0 \end{cases} \quad (E)$$

On définit sur $E_{\Gamma_0}(O)$ l'application:

$$\delta: E_{\Gamma_0}(O) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ telle que } \forall \Omega \text{ on associe } \delta(\Omega) = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial n} g_0 d\Gamma$$

Le problème fondamental dans cette partie est de répondre à la question suivante :

Soit $\Omega \in E_{\Gamma_0}(O)$, la connaissance de $\delta(\Omega)$ comme le stipule le problème posé permet-elle de déterminer Ω ?

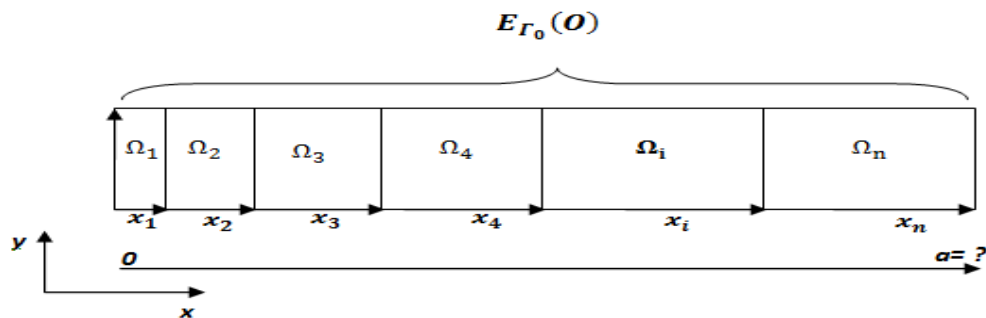


Figure 3. Représentation de Ω en dimension 2

Théorème 5.2. Théorème de base **OUYA et NIANE** [6]

Soit $\Omega_1, \Omega_2 \in E_{\Gamma_0}(O)$ tels que :

$\Omega_1 \subset \Omega_2$ alors $\delta(\Omega_1) - \delta(\Omega_2) > 0$

La démonstration de ce résultat fondamental repose sur les lemmes préliminaires suivants :

Lemme 5.2.1. Soit $\Omega_1, \Omega_2 \in E_{\Gamma_0}(O)$ tels que $\Omega_1 \subset \Omega_2$ alors $\partial\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ [9]

Lemme 5.2.2. Soit Ω un ouvert borné de classe C^2 et Γ_1 une partie ouverte non vide de son bord. Si $u \in C(\Omega \cup \Gamma_1)$ vérifie
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } D'(\Omega) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad [5]$$

Lemme 5.2.3. Soit Ω un ouvert borné de classe C^2 . Si $u \in H_0^1(\Omega)$ et $-\Delta u \in C(\bar{\Omega})$ alors $\forall \alpha \in]0,1[, \quad u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ [5]

Lemme 5.2.4. Soient $\Omega \in E_{\Gamma_0}(O)$ et u solution de (E) alors $u \in C^1(\Omega \cup (\partial\Omega \setminus \Gamma_0))$ [9]

Lemme 5.2.5. Soient Ω un domaine borné de classe C^2 de bord $\partial\Omega$ et $q \in L^\infty(\Omega)$. Soit B une boule ouverte de Ω telle que $B \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, Si $u \in H^2(\Omega)$ et vérifie

$$\begin{cases} -\Delta u + qu = 0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } B \cap \partial\Omega \end{cases} \quad \text{Alors } u=0 \text{ dans } \Omega, \text{ d'où le théorème 5.2.}$$

Ce théorème est le résultat fondamental sur lequel est basée la méthode que nous proposons ici pour reconnaître le domaine Ω recherché en dimension 2 cas stationnaire, connaissant la valeur de $\delta(\Omega)$. Ce théorème se généralise dans la détermination du domaine pour toute forme quelconque.

Algorithme décrivant la procédure de détermination des valeurs de Ω_i (figure 3)

1. *Début*
2. *En considérant*
3. $E_{\Gamma_0}(O) = \{\Omega \subset O, \Omega \text{ domaine borné de classe } C^2 \text{ avec } \Gamma_0 \subset \partial\Omega\}$;
4. *En considérant*
$$\begin{cases} -\Delta u_i + cu_i = 0 & \text{sur } \Omega_i \\ u_i|_{\Gamma_0} = g \geq 0 \\ u_i|_{\partial\Omega \setminus \Gamma_0} = 0 \end{cases} ;$$
5. *Suivant l'itération sur i ;*
6. *Si pour tout $\delta : E_{\Gamma_0}(O) \rightarrow \mathbb{R}$, la valeur de $\delta(\Omega_i) = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u_i}{\partial n} g_0 d\Gamma$ existe alors*
Appel à l'algorithme élaboré en dimension 1.
7. *Détermination de Ω*
8. *Fin*

On déterminera au préalable les différents valeurs des fonctions $\delta(\Omega_i) = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u_i}{\partial n} g_0 d\Gamma$ correspondantes pour chaque sous domaine Ω_i représentant une partie où il y a présence où

non d'un gisement. Ces valeurs identifiées seront enregistrées dans une base de données, comme l'indique ce le tableau ci-dessous :

Ω_1 ou x_1	Ω_2 ou x_2	...	Ω_n ou x_n
$\delta(\Omega_1)$	$\delta(\Omega_2)$...	$\delta(\Omega_n)$

Tableau 2. Résultats des différentes valeurs de Ω_i

5.3. En dimension 3 : forme cylindrique.

Avec les mêmes considérations qu'au 2.2, mais cette fois-ci en dimension 3, forme cylindrique. On considère la position du problème définie par le système suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = 0 \text{ sur } \Omega \\ u|_{\Gamma_0} = f \text{ sur } \partial\Omega \\ u|_{\partial\Omega \setminus \Gamma_0} = 0 \end{cases}$$

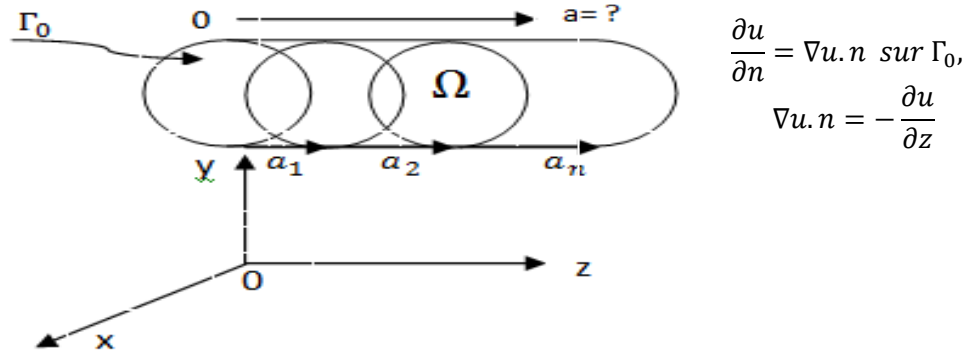


Figure 3. Représentation de Ω en dimension 3

Afin de déterminer le domaine Ω du phénomène, il va falloir tout d'abord trouver la bonne fonction (le bon signal) avec laquelle il faudra utiliser pour l'excitation du phénomène sur le bord du domaine Ω .

Hypothèse :

La fonction c ne dépend pas de l'ordonnée z .

La méthode de séparation de variables de Hervé DELINGETTE [19] suivante :

$\begin{cases} u(x, y, z) = u_1(x, y)u_3(z) \\ \text{avec } u(x, y, z)|_{\partial\Omega \setminus \Gamma_0} = 0 \end{cases}$ permet d'obtenir par application de la formule du Laplacien

une formulation du problème en dimension 1, représentée par l'équation :

$$\begin{cases} -u_3''(z) + \lambda_1 u_3(z) = 0 \text{ sur }]0, a[\\ u_3(0) = 1 \\ u_3'(0) \text{ est connu} \\ u_3(a) = 0 \end{cases}$$

Ainsi le travail à faire se ramène en dimension 1 et se résume à la détermination a dans l'intervalle $]0, a[$. Pour en arriver là, il faudra déterminer les valeurs de u_1 et λ_1 .

Détermination de u_1 et λ_1

Déterminer réellement u_1 et λ_1 revient à savoir exactement quel type de signal il faudra utiliser pour exciter notre phénomène sur le disque $D(0, R)$:

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + c(x, y)u_1(x, y) = \lambda_1 u_1 \text{ sur } D(0, R) \\ u_1 = 0 \text{ sur } C(0, R) \end{cases}, \text{ après changement de variables on obtient :}$$

$$\Delta u_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2}$$

Dans le contexte où $c = 0$

On obtient $\Delta u_1 = \lambda_1 u_1$

Trouvons v_1 et v_2 tels que $u_1(r, \theta) = v_1(r)v_2(\theta)$ sur $c(0, R)$, $v_1(R) = 0$ et $v_2(\theta)$ est périodique de période 2π . En choisissant $v_2(\theta) = \sin(\theta)$, alors $u_1(r, \theta) = v_1(r)\sin(\theta)$ et on aboutit au système suivant :

$$\begin{cases} -v_1''(r)v_2(\theta) - \frac{1}{r}v_1'(r)v_2(\theta) - \frac{1}{r^2}v_1(r)v_2''(\theta) = \lambda_1 v_1(r)v_2(\theta) \\ v_1(R) = 0 \\ v_2(\theta) = \sin(\theta) \text{ périodique de période } 2\pi \end{cases}$$

Il vient donc

$$\left(v_1''(r) + \frac{1}{r}v_1'(r) + \lambda_1 v_1(r) \right) v_2(\theta) + \frac{1}{r^2}v_1(r)v_2''(\theta) = 0$$

Ce qui implique

$$\left(v_1''(r) + \frac{1}{r}v_1'(r) + \lambda_1 v_1(r) \right) + \frac{1}{r^2}v_1(r) \frac{v_2''(\theta)}{v_2(\theta)} = 0$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $v_2''(\theta) = \alpha \cdot v_2(\theta)$ et on considère pour la suite que $\alpha = -n^2$

Alors on trouve $v_2(\theta) = \sin(n\theta)$ et ainsi v_2 est 2π périodique,

$$v_1''(r) + \frac{1}{r}v_1'(r) + \lambda_1 v_1(r) + \frac{\alpha}{r^2}v_1(r) = 0$$

Soit $r^2 v_1''(r) + r v_1'(r) + (\alpha + \lambda_1 r^2) v_1(r) = 0$

Plus précisément $r^2 v_1''(r) + r v_1'(r) + (\lambda_1 r^2 - n^2) v_1(r) = 0$

En remplaçant r par $r\sqrt{\lambda_1}$

La nouvelle formulation de prétendue est:

$$r^2 \lambda_1 v_1''(r\sqrt{\lambda_1}) + r\sqrt{\lambda_1} v_1'(r\sqrt{\lambda_1}) + (\lambda_1^2 r^2 - n^2) v_1(r\sqrt{\lambda_1}) = 0$$

Et en posant $\rho = r\sqrt{\lambda_1}$, On arrive à obtenir $\frac{d^2 v_1}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dv_1}{d\rho} + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right) v_1 = 0$

On reconnait alors une forme d'équation différentielle dite de Bessel et dont les solutions est sous la forme de la série : $v_1(\rho) = \sum_n^\infty a_n \rho^n$, où v_1 est une fonction de Bessel d'ordre n

Ainsi les signaux qui serviront à l'excitation du phénomène au bord du domaine seront les fonctions de Bessel de première espèce ($BesselJ_n$) avec $BesselJ_n(\rho) = v_1(\rho) = v_1(r\sqrt{\lambda_1})$ on trouve $v_1(r) = v_1\left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda_1}}\right)$ et les valeurs propres de l'opérateur leurs racines, qui se calculeront de la manière suivante :

$v_1(\rho) = 0$ donc si ρ_0 est une racine d'une fonction de Bessel d'ordre n , alors d'après (9) il vient $\rho_0 = r\sqrt{\lambda_1}$.

D'où $\lambda_1 = (\rho_0/r)^2$ est une valeur propre de l'opérateur associée à une fonction de Bessel correspondante. On en déduit par la suite un algorithme de détermination de u_1 et λ_1

Algorithme de détermination de u_1 et λ_1

1. *Début*
2. *Fixons $n \in \mathbb{N}$;*
3. *Déterminer $v_1(r) = BesselJ_n(r)$*
4. *Déterminer une racine ρ_0 de $v_1(r)$*
5. *Posons $\sqrt{\lambda_1} = \rho_0/R$*
6. *Obtenir $\lambda_1 = (\rho_0/R)^2$*
7. *Posons $v_1(r) = v_1\left(\frac{R}{\sqrt{\lambda_1}}\right) = BesselJ_n\left(\frac{R}{\sqrt{\lambda_1}}\right) = BesselJ_n\left(\frac{Rr}{\rho_0}\right)$*
8. *Obtenir $u_1(r, \theta) = v_1(r) \sin(\theta) = BesselJ_n\left(\frac{Rr}{\rho_0}\right)$*
9. *Fin*

Algorithme décrivant la procédure de détermination des valeurs de Ω_i (figure 3)

1. *Début*
2. *Sous programme permettant de déterminer u_1 et λ_1 pour exciter le phénomène au bord du domaine, sur le disque (cylindrique) avec un signal, tel que :*
3.
$$\begin{cases} -\Delta u_1 + c(x, y)u_1(x, y) = \lambda_1 u_1 \text{ sur } D(0, R) \\ u_1 = 0 \text{ sur } C(0, R) \end{cases}$$
4. *Il est important de signaler ici que le phénomène doit être excité seulement sur le disque $D(0, R)$ avec un signal spécifique qui permettra de déterminer le domaine.*
5. *Appel à la procédure 2*
6. *Puis sachant que*
7.
$$\int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial n} g d\Gamma = -u'_3(0) \int_{\Gamma_0} u_1(x, y) d\Gamma \text{ est connu}$$
8. *On déterminera le domaine en résolvant l'équation suivante en dimension 1:*

$$9. \begin{cases} -u_3''(z) + \lambda_1 u_3(z) = 0 \text{ sur }]0, a[\\ u_3(0) = 1 \\ u_3'(0) \text{ est connu} \\ u_3(a) = 0 \end{cases}$$

10. Appel à l'algorithme élaboré en dimension 1.

11. Fin

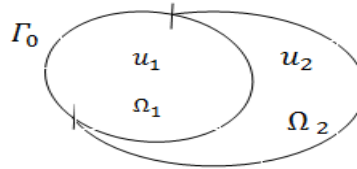
En supposant au préalable que les valeurs $u'_{a_i}(0)$ correspondantes pour chaque nœud a_i du domaine représentant une ligne de transmission par fibre optique ont été évaluées, mesurées et enregistrées dans une base de données, comme l'indique ce le tableau ci-dessous.

a_1	a_2	...	a_n
$u'_{a_1}(0)$	$u'_{a_2}(0)$...	$u'_{a_n}(0)$

Tableau 3. Résultats des différentes valeurs de \mathbf{a}_i

5.4. Forme quelconque.

Pour une forme quelconque de domaine, considérons Γ_0 une surface d'un domaine figure4.



. Figure 4. Représentation de Ω, forme quelconque

On fait dans toute la suite l'hypothèse suivante :

Il n'existe pas une fonction g_0 définie sur Γ_0 non nulle et positive telle que :

$$\forall \Omega \in E_{\Gamma_0}(0), \quad \widetilde{g}_0: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \widetilde{g}_0(x) = \begin{cases} g_0(x) & \text{si } x \in \Gamma_0 \\ 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \setminus \Gamma_0 \end{cases}, \quad \widetilde{g}_0 \text{ admet un relèvement sur } \Omega$$

appartenant à $H^2(\Omega)$ [21].

Théorème 5.4.

Soit $E = \{\Omega \text{ domaines bornées de } \mathbb{R}^3 | \Gamma_0 \subset \partial\Omega\}$,

$$\forall \Omega_1, \Omega_2 \in E | \Omega_1 \subset \Omega_2, \text{ alors } \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u_2}{\partial n} d\Gamma \leq \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u_1}{\partial n} d\Gamma$$

Ce théorème d'après [8] de Samuel OUYA nous permet de conclure pour le cas d'un domaine qui a une forme quelconque, les conditions connues au bord du domaine impliquent par dichotomie la connaissance de sous domaines et de proche en proche celle du domaine cible.

Ainsi dans ce contexte où la forme du domaine est quelconque, on peut également construire un algorithme qui servira particulièrement pour une entreprise qui à détecter un gisement de minerais ou de pétrole de savoir le domaine global de l'étendu dudit gisement.

Algorithme décrivant la procédure de détermination des valeurs de Ω_i (figure 4)

1. *Début*
2. *En considérant*
$$\begin{cases} -\Delta u_i + cu_i = 0 \text{ sur } \Omega_i \\ u_i|_{\Gamma_0} = g \geq 0 \\ u_i|_{\partial\Omega \setminus \Gamma_0} = 0 \end{cases}$$
3. *si* $\Omega_{i-1} \subset \Omega_i$ *alors* $\int_{\Gamma_0} \frac{\partial u_{i-1}(x_0)}{\partial n} d\Gamma < \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u_i(x_0)}{\partial n} d\Gamma$
4. *Appel à l'algorithme élaboré en dimension 1.*
5. *Fin*

En supposant au préalable connues les différents valeurs des fonctions $\int_{\Gamma_0} \frac{\partial u_i(x_0)}{\partial n} d\Gamma$ correspondantes pour chaque sous domaine Ω_i représentant une partie la présence où non d'un gisement par exemple, les valeurs identifiées seront enregistrées dans une base de données, comme l'indique ce le tableau ci-dessous.

Ω_1	Ω_2	...	Ω_n
$\int_{\Gamma_0} \frac{\partial u_1(x_0)}{\partial n} d\Gamma$	$\int_{\Gamma_0} \frac{\partial u_2(x_0)}{\partial n} d\Gamma$...	$\int_{\Gamma_0} \frac{\partial u_n(x_0)}{\partial n} d\Gamma$

Tableau 4. Résultats des différentes valeurs de Ω_i

6. Conclusion

L'étude que nous avons réalisée dans ce mémoire nous a permis d'aboutir à des résultats permettant de proposer des algorithmes de reconnaissance de domaines modélisés par des phénomènes stationnaires en dimension $n=1,2,3$; résultats pouvant être exploités dans les domaines d'applications comme la téléphonie sur câble, l'électricité, la transmission sur fibre optique, la détermination de l'étendu d'un gisement de pétrole ou d'une catastrophe.

Pour atteindre ces résultats, on s'est appuyé sur les propriétés des espaces de Sobolev, la formulation variationnelle, la formule de Green, le théorème de Riesz, le principe du maximum pour avoir l'existence et l'unicité des solutions des problèmes elliptiques. Les signaux excitateurs que nous avons proposés dans le cas cylindrique dépendent des fonctions de Bessel que nous avons rappelées dans la partie outils mathématiques, conduisant ainsi à justifier que notre problème était bien posé. En dimension quelconque ($n \leq 3$), nous avons montré la stricte décroissance de la fonction $\int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial n} g d\Gamma$ (où n désigne la normale extérieure à $\partial\Omega$) sous certaines conditions, ce qui nous a amené à déterminer un algorithme permettant d'approcher et d'approximer un domaine Ω par dichotomie.

En perspective, il sera intéressant de supposer que le domaine Ω est régi par un phénomène non stationnaire, d'étudier ainsi la détermination du domaine dans le cas évolutif.

7. Bibliographie et Biographie

7.1. Bibliographie.

7.1.1. Ouvrages.

- [1] **Robert Dautray – J.L. Lions** : *Analyse mathématique et calcul numérique, Tome 2 – L'opérateur Laplacien-*. Edition Masson, 1987.
- [2] **Gilbert DEMENGEL, Paul BENICHOU, Rosine BENICHOU, Norbert BOY**. *Equation Différentielle, Unicité et Stabilité. Outils pour l'ingénieur*. Edition ELLIPSES, 1997. ISBN : 2 7298 4720 0
- [3] **Robert Dautray – J.L. Lions** : *Analyse mathématique et calcul numérique, Tome 2 – L'opérateur Laplacien-*. Edition Masson, 1987.
- [4] **F. Demengel & G. Demengel** : *Mesures et Distributions: Théorie et Illustration par les exemples*. Edition.Ellipses, 2000.
- [5] **H. Brezis** : *Analyse Fonctionnelle Appliquée*. Edition. Masson, 1983
- [6] **Samuel OUYA – M. T. Niane**, *Reconnaissance de domaines*, Preprint, Université Gaston Berger, 1996
- [7] **Gilbert DEMENGEL, Paul BENICHOU, Rosine BENICHOU, Norbert BOY**. *Equation Différentielle, Unicité et Stabilité. Outils pour l'ingénieur*. Edition ELLIPSES, 1997. ISBN : 2 7298 4720 0
- [8] **Samuel OUYA**, *Identification de coefficients de l'équation des ondes et reconnaissance de domaines*, Thèse de Doctorat, Université Gaston Berger de Saint-Louis, 1996
- [9] **Mouhmadou Lamine BALDE** : *Reconnaissance Automatique de Domaine Par observation Frontière*. Mémoire DEA Option Analyse Numérique 2001.
- [10] **L. Schwartz** : *Analyse Hilbertienne*. Edition. Hermann, 1979.
- [11] **J.A. Desideri**. *Introduction à l'analyse numérique*. INRIA, 1998.
- [12] **E. Hairer**. *Méthodes numériques*. Cours de l'université de Genève, 2004.
- [13] **N. Point and J.H. Saïac**. *Equations aux dérivées partielles - mathématiques et méthodes numériques*. Cours de l'ESCPI, 2005.

7.1.2. Articles et Revues.

- [14] **RANDE Bernard** (2006). «*Techniques de l'ingénieur. Sciences fondamentales* » *Équations différentielles = Differential equations*.
- [15] **Kuntz Gérard**. « TOPIQUES éditions Metz, 2002 » *Equations différentielles : la perte du sens n'est pas sans risque*.
- [16] **J. Malmquist**, *Sur les fonctions à un nombre fini de branches définies par les équations différentielles du premier ordre*, Acta Math. 2003

- [17] **María Teresa Camacho Olmedo, Martin Paegelow et Pilar García Martínez,** «*Modélisation géomatique rétrospective des paysages par évaluation multicritères et multiobjectifs* » article 365, 09 mars 2007
- [18] **Patrice Langlois et Eric Daudé** «*Concepts et modélisations de la diffusion géographique*» article 364 de Ubiquitous University Journal, 09 mars 2007
- [19] **Hervé DELINGETTE.** (2001). *modélisation, déformation et reconnaissance d'objets tridimensionnels a l'aide de maillages simples*. Ecole Centrale de Paris.

7.1.3. Thèses.

- [20] **Anne AUBREY.** (1997). Thèse de doctorat sur l'indentification de forme d'objets, l'Université Louis Pasteur, Strasbourg. Université de Rennes 1.

7.1.4. Références Webographiques.

Théorème de relèvement

- [21] http://math.unice.fr/~bertheli/Page_Web/Agreg/FeuillesTD0607/Relevement.pdf

Leçons d'analyse mathématique

- [22] http://www.dynamaths.com/agreg/lecons_analyse/ (consultée en Sept 2010)

Théorie de Fourier et Equation Différentielle Linéaire Partielle

- [23] <http://planetmath.org/?op=getobj&from=books&id=123> (consultée en Oct 2010)

Analyse hilbertienne et Fourier

- [24] <http://people.math.jussieu.fr/~maureyFourHilb/index.html> (consultée en Nov 2010)

Mathematica par l'exemple

- [25] <http://www.apprendre-en-ligne.net/mathematica/index.html> (consultée en Oct 2010)

Equations de Laplace, Helmholtz

- [26] <http://www.lesia.obspm.fr/perso/jean-marie-malherbe/cours/schrodinger.pdf>
(consultée en Nov 2010)

Fonctions de plusieurs variables & Equations différentielles Niveau I

- [27] <http://domus.grenet.fr/grimass/MathSHS/MASS2/Analyse/COURS/Tab1.htm>
(consultée en Oct 2010)

Propagation le long d'une ligne de transmission

- [28] <http://www.on4cpn.be/lignes.pdf> *propagation le long d'une ligne de transmission*
(consultée en Oct 2010)

Fonctions de Green de l'équation de Helmholtz

- [29] [http://iramis.cea.fr/Phoea/file.php?class=cours&file=/cbarreteau/tut1_2008_2eme.p](http://iramis.cea.fr/Phoea/file.php?class=cours&file=/cbarreteau/tut1_2008_2eme.pdf)
df (consultée en Oct 2010)

Modélisation des phénomènes de propagation des ondes

- [30] <http://catalogue.polytechnique.fr/site.php?id=123&fileid=684> (consultée en Jan 2010)

7.2. Biographie.

-Dr OUYA Samuel

Chercheur et Chef de Laboratoire Informatique et Réseaux Télécoms (LIRT)

Université Cheikh Anta Diop deDakar

-Dr KORA Ahmed

Enseignant Charcheur en TIC

Ecole Supérieure Multinationale des Télécommunications

-Msc TAMGNO James

Enseignant Formation TIC

Ecole Supérieure Multinationale des Télécommunications